この pdf の目標は、被覆空間のホモトピー持ち上げ定理から、平面から二点を取り除いた空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{C}-\{\pm 1\})$ が非アーベル群であることを導くことである。

準備

定義. 位相空間 X の曲線とは、単位区間 $I=[0,1]$ から X への連続写像のことをいう。

定義. $p: Y \to X$ を位相空間の間の連続写像とする。連続写像 $f: Z \to X$ の (p についての) 持ち上げとは、連続写像 $\widetilde{f}: Z \to Y$ で $p \circ \widetilde{f} = f$ となるもののことである。

定義. 位相空間の間の連続写像 $p: Y \to X$ が局所同相であるとは、任意の $y \in Y$ に対しその開近傍 V があって、$U = p(V)$ が X の開集合で、かつ $p|V: V \to U$ が同相写像になることをいう。

(端点固定の) ホモトピックな曲線は、(端点固定の) ホモトピックな曲線に持ち上がる。

定理 1. (ホモトピーの持ち上げ)
X, Y を Hausdorff 空間とし、連続写像 $p: Y \to X$ が局所同相であるとする。
$x_0, x_1 \in X$, $y_0 \in Y$ として、$p(y_0) = x_0$ であるとする。
連続写像 $F: I \times I \to X$ に対して、$f_s(t) = F(s,t)$ によって各 $s \in I$ に対し曲線 $f_s: I \to X$ を定める。
任意の $s \in I$ に対して $f_s(0) = x_0$, $f_s(1) = x_1$ であり、持ち上げ $\widetilde{f}_s: I \to Y$ で $\widetilde{f}_s(0) = y_0$ となるものが存在するなら、連続な $\widetilde{F}: I \times I \to X$ で、$\widetilde{F}(0,t) = \widetilde{f}_0(t)$, $\widetilde{F}(1,t) = \widetilde{f}_1(t)$ となり、かつ任意の $s \in I$ に対して $\widetilde{F}(s,1) = \widetilde{f}_0(1) = \widetilde{f}_1(1)$ となるものが存在する。

定義. $p: Y \to X$ を位相空間の間の連続写像とする。任意の曲線 $u: I \to X$ について、$u(0) = x$, $p(y) = x$ となっているとき、p に関する u の持ち上げ $\widetilde{u}: I \to Y$ で $\widetilde{u}(0) = y$ となるものが存在するとき、p は curve lifting property を持つ、という。

定義. 位相空間 X, Y と連続な写像 $p: Y \to X$ が被覆写像であるとは、任意の $x \in X$ に対しその開近傍 U と、Y の互いに交わりのない開集合 V_i $(i \in I)$ があって、$p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ かつ各 $i \in I$ に対し $p|V_i: V_i \to U$ が同相写像となることである。各 V_i を sheet と呼ぶ。

定理 2. 被覆写像は curve lifting property を持つ。

証明

$Y = \mathbb{C} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, $X = \mathbb{C} - \{\pm 1\}$ として、$\sin: Y \to X$ を考える。これは被覆写像であることを示そう。

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $f(z) = e^{iz}$ 及び $g: \mathbb{C} - \{0, \pm i\} \to \mathbb{C} - \{\pm 1\}$, $g(z) = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$ は被覆写像である。したがって、$f^{-1}(\mathbb{C} - \{0, \pm i\}) = \mathbb{C} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} = Y$ であり、$\sin = g \circ f|Y: Y \to X$ は被覆写像となる。これは、g が二重被覆、すなわち sheet の枚数が 2 であることからしたがう。

$D = \mathbb{C} - \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ 上での対数の主値を log とする。つまり $-\pi < \mathrm{Im} \log z < \pi$ となるようにする。また、平方根を $\sqrt{z} = \exp(1/2 \log z)$ として D 上で定義する。

曲線 $u, v : I \to X,\ u(t) = 1 - e^{2\pi i t},\ v(t) = -u(t)$ を考える。それぞれ $1, -1$ を中心とする、0 を始点に持つ反時計回りの円周である。u の sin に関する持ち上げを構成しよう。

まず、$\dfrac{1}{2i}\left(w - \dfrac{1}{w}\right) = z$ を解くと、$w = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$ となる。

そこで、$\widetilde{u_1} : [0,\,1/2) \to Y$ を $\widetilde{u_1}(t) = \dfrac{1}{i} \log\left(iu(t) + \sqrt{1 - u(t)^2}\right)$ で定めることができる。実際、$0 < t < 1/2$ において $-\pi/2 < \arg u(t) < 0$ だから $0 < \arg\left(1 - u(t)^2\right) < \pi$ であり、$0 < \arg \sqrt{1 - u(t)^2} < \pi/2,\ 0 < \arg iu(t) < \pi/2$ ゆえ log の中身は負の実数あるいは 0 ではない。したがって $\widetilde{u_1}$ は $[0,\,1/2)$ 上で連続な曲線を定め、$\sin \widetilde{u_1}(t) = u(t)$.
次に、同じ方法で連続な曲線 $\widetilde{u_2} : (1/2,\,1) \to Y$ を $\widetilde{u_2}(t) = \dfrac{1}{i} \log\left(iu(t) - \sqrt{1 - u(t)^2}\right)$ で定めることができ、$\sin \widetilde{u_2}(t) = u(t)$.
このとき、

$$\lim_{t \to 1/2 - 0} \widetilde{u_1}(t) \;=\; \frac{1}{i} \log(2i + \sqrt{3} i) \;=\; \lim_{t \to 1/2 + 0} \widetilde{u_2}(t)$$

を見る。なぜなら、t が小さい方から $1/2$ に近づくとき $1 - u(t)^2$ の偏角は、0 から π へ近づくから、$\sqrt{1 - u(t)^2}$ は $\sqrt{3} i$ に近づく。t が大さい方から $1/2$ に近づくとき $1 - u(t)^2$ の偏角は、0 から $-\pi$ へ近づくから、$\sqrt{1 - u(t)^2}$ は $-\sqrt{3} i$ に近づく。
最後に、$\lim_{t \to 1} \widetilde{u_2}(t) = \pi$ である。というのも、$t \to 1$ のとき、$iu(t) - \sqrt{1 - u(t)^2}$ の偏角は π へ (下から) 近づくからである。
したがって、$\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}$ を適切に接続して、曲線 $\widetilde{u} : I \to Y$ で $\widetilde{u}(0) = 0,\ \widetilde{u}(1) = \pi,\ \sin \widetilde{u}(t) = u(t)$ となるものを構成することができる。

$u \cdot v$ の持ち上げとして、$w_1(t) = \begin{cases} +\widetilde{u}(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ +\widetilde{u}(2t - 1) + \pi & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$ が取れ、
$v \cdot u$ の持ち上げとして、$w_2(t) = \begin{cases} -\widetilde{u}(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ -\widetilde{u}(2t - 1) - \pi & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$ が取れる。
$w_1(0) = w_2(0) = 0,\ w_1(1) = 2\pi,\ w_2(1) = -2\pi$ である。したがって、もし $u \cdot v$ と $v \cdot u$ がホモトピックであるなら、定理 1 によりそれらの持ち上げである w_1, w_2 もホモトピックであるはずであり、特に $w_1(1) = w_2(1)$ とならなければならないが、これは矛盾である。

参考文献

Forster, O. [1981] *Lectures on Riemann Surfaces* (Springer, Berlin)